**TEORÍA DE LOS GRUPO-ANILLOS**

**Y SUS APLICACIONES**

*Hugo Allan García Monterrosa*

*hugoallangm@gmail.com*

*Licenciado en Matemática Aplicada*

*Asesor: Licenciado en Matemática Aplicada, William Roberto Gutiérrez Herrera*

**RESUMEN**

Se realizó el desarrollo de los grupo-anillos, una nueva estructura algebraica generda a partir de un grupo y un anillo dado, estudiando las conexiones entre la nueva estructura y las anteriores. Luego de estudiar las propiedades algebraicas de los grupo-anillos se hace un breve estudio de los códigos correctores, para finalizar con la relación que existe entre los códigos cíclicos y las grupo-álgebras.

***Palabras clave:*** *álgebra, grupos, anillos, códigos.*

**CUERPO**

El trabajo está estructurado en seis capítulos, cuyo contenido se describe a continuación:

El primer capítulo contiene todo el bagaje matemático que sirve de cimiento para un estudio adecuado de los grupo-anillos.

En el segundo capítulo se da la definición de un grupo-anillo y una grupo-álgebra, caso especial del anterior. Posteriormente, se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que un grupo-anillo sea semisimple.

En el tercer capítulo se estudia la teoría de representación de grupos y su relación con los módulos de los grupo-anillos.

En el cuarto capítulo se estudian algunos elementos algebraicos de un grupo-anillo como los elementos nilpotentes, los idempotentes y las unidades de torsión.

En el quinto capítulo se da una breve introducción al estudio de las unidades de un grupo-anillo, mostrando algunas construcciones de unidades no triviales para los mismos.

Finalmente en el sexto capítulo se da una introducción a la teoría de códigos correctores, dando relevancia a los códigos cíclicos y mostrando que dichos códigos tienen una fuerte conexión con las grupo-álgebras.

**RESULTADOS**

Del estudio de los grupo-anillos se obtuvo:

1. Sea G un p-grupo abeliano finito. Entonces G se puede escribir como producto directo de p-subgrupos cíclicos. Dicha composición es única.
2. El grupo-anillo RG es semisimple si y sólo si las siguientes condiciones son verdaderas:

* R es un anillo semisimple
* G es finito
* |G| es invertible en R

1. Existe una biyección entre las representaciones de G en R y los RG-módulos libres de rango finito.
2. Si la característica del del campo no divide al orden del grupo, entonces el estudio de los grupos cíclicos es equivalente al estudio de ideales en grupo-álgebras.

**CONCLUSIONES**

1. Para el estudio de los grupo-anillos es importante conocer la estructura de los grupos abelianos y hamiltonianos, así como la teoría de módulos y el teorema de Wedderburn-Artin.
2. Las condiciones necesarias y suficientes para que un grupo-anillo sea semisimple, vienen dadas por el teorema de Maschke.
3. Toda representación de un anillo conmutativo sobre un grupo dado,
4. corresponde a un módulo del grupo-anillo correspondiente.
5. En general no es fácil encontrar unidades no triviales en grupo-anillos, pero es posible construir algunas usando elementos idempotentes.
6. Las grupo-álgebras dan estructura matemática a los códigos correctores conocidos como códigos cíclicos.
7. Cuando la característica del campo no divide al orden del grupo el estudio de los códigos cíclicos se reduce a estudiar los ideales de grupo-álgebras generadas por elementos idempotentes.

**RECOMENDACIONES**

1. Usar el primer capítulo como guía de temas para el desarrollo de un curso de álgebra moderna de pregrado.
2. Para el estudio de los códigos cíclicos, se puede utilizar los resultados del capítulo 2, en especial los de las secciones 2.3 y 2.4.
3. Estudiar la teoría de códigos correctores desde el punto de vista algebraico, permitiendo así dictaminar la capacidad correctora de los mismos.
4. Para la lectura de los capítulos 2 y 3 es importante tener conocimientos previos de teoría de grupos y anillos.
5. Implementar el estudio de teoría de módulos en el curso de álgebra 2 de la licenciatura en Matemática Aplicada de la USAC.

**BIBLIOGRAFÍA**

1. BELL, Eric. *Los grandes matemáticos*. Argentina: Editorial Losada, 1948.
2. BLAKE, Ian. *The mathematical theory of coding*. Estados Unidos: Academic Press Inc, 1975.
3. BURNSIDE, William. *The theory of groups of finite order*. 2da ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1911.
4. CAUCHY, Augustin-Louis. Oeuvres complètes. 1era ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
5. DESKINS, Eugene.”Finite abelian groups with isomorphic group algebras". *Duke Mathematical Journal*. 1956, vol 23, núm. 1, p. 35-40.
6. FEIT, Walter, et al. “The solvability of groups of odd order". *Pacific J. Math*. 1963, vol 13, núm 3, p. 775-1029.
7. GOLDSHMIDT, David. “A group theoretic proof of the theorem for odd primes".*Mathematische Zeitschrift*. 1970, vol 113, núm. 5, p. 373-375.
8. HAWKINS, Thomas. “The origins of the theory of group characters". *Archive for History of Exact Sciences*. 1971, vol 7, núm. 2, p. 142-170.
9. HERSTEIN, Nathain. *Topics in algebra*. 2da ed. New York: Macmillah, 1986.
10. IAN, Connell. “On the group ring". *Canad. J. Math*. 1963, vol 15, núm 1, p. 650-685.
11. ISAACS, Martin. *Algebra: a graduate course*. Estados Unidos: Editorial Pacific Grove, 1940.

1. LANG, Serge. *Linear algebra*. 3ra ed. Nueva York: Springer-Verlag, 2004. 308 p.
2. POLCINO, César; SEHGAL, Sudarshan. *An introduction to group rings*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 371 p.

**AGRADECIMIENTOS**

A Dios y a mi familia.

**AUTOR**

****

*Hugo Allan García Monterrosa*

*Licenciado en Matemática Aplicada*

*Facultad de Ingeniería*

*Universidad de San Carlos de Guatemala*