**TEORÍA DE LOS GRUPO-ANILLOS**

**Y SUS APLICACIONES**

*Hugo Allan García Monterrosa*

*hugoallangm@gmail.com*

*Licenciado en Matemática Aplicada*

*Asesor: Licenciado en Matemática Aplicada, William Roberto Gutiérrez Herrera*

**RESUMEN**

Se realizó el desarrollo de los grupo-anillos, una nueva estructura algebraica generda a partir de un grupo y un anillo dado, estudiando las conexiones entre la nueva estructura y las anteriores. Luego de estudiar las propiedades algebraicas de los grupo-anillos se hace un breve estudio de los códigos correctores, para finalizar con la relación que existe entre los códigos cíclicos y las grupo-álgebras.

***Palabras clave:*** *álgebra, grupos, anillos, códigos.*

**CUERPO**

El trabajo está estructurado en seis capítulos, cuyo contenido se describe a continuación:

El primer capítulo contiene todo el bagaje matemático que sirve de cimiento para un estudio adecuado de los grupo-anillos.

En el segundo capítulo se da la definición de un grupo-anillo y una grupo-álgebra, caso especial del anterior. Posteriormente, se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que un grupo-anillo sea semisimple.

En el tercer capítulo se estudia la teoría de representación de grupos y su relación con los módulos de los grupo-anillos.

En el cuarto capítulo se estudian algunos elementos algebraicos de un grupo-anillo como los elementos nilpotentes, los idempotentes y las unidades de torsión.

En el quinto capítulo se da una breve introducción al estudio de las unidades de un grupo-anillo, mostrando algunas construcciones de unidades no triviales para los mismos.

Finalmente en el sexto capítulo se da una introducción a la teoría de códigos correctores, dando relevancia a los códigos cíclicos y mostrando que dichos códigos tienen una fuerte conexión con las grupo-álgebras.

**RESULTADOS**

Del estudio de los grupo-anillos se obtuvo:

1. Sea G un p-grupo abeliano finito. Entonces G se puede escribir como producto directo de p-subgrupos cíclicos. Dicha composición es única.
2. El grupo-anillo RG es semisimple si y sólo si las siguientes condiciones son verdaderas:

* R es un anillo semisimple
* G es finito
* |G| es invertible en R

1. Existe una biyección entre las representaciones de G en R y los RG-módulos libres de rango finito.
2. Si la característica del del campo no divide al orden del grupo, entonces el estudio de los grupos cíclicos es equivalente al estudio de ideales en grupo-álgebras.

**CONCLUSIONES**

1. Para el estudio de los grupo-anillos es importante conocer la estructura de los grupos abelianos y hamiltonianos, así como la teoría de módulos y el teorema de Wedderburn-Artin.
2. Las condiciones necesarias y suficientes para que un grupo-anillo sea semisimple, vienen dadas por el teorema de Maschke.
3. Toda representación de un anillo conmutativo sobre un grupo dado,
4. corresponde a un módulo del grupo-anillo correspondiente.
5. En general no es fácil encontrar unidades no triviales en grupo-anillos, pero es posible construir algunas usando elementos idempotentes.
6. Las grupo-álgebras dan estructura matemática a los códigos correctores conocidos como códigos cíclicos.
7. Cuando la característica del campo no divide al orden del grupo el estudio de los códigos cíclicos se reduce a estudiar los ideales de grupo-álgebras generadas por elementos idempotentes.

**RECOMENDACIONES**

1. Usar el primer capítulo como guía de temas para el desarrollo de un curso de álgebra moderna de pregrado.
2. Para el estudio de los códigos cíclicos, se puede utilizar los resultados del capítulo 2, en especial los de las secciones 2.3 y 2.4.
3. Estudiar la teoría de códigos correctores desde el punto de vista algebraico, permitiendo así dictaminar la capacidad correctora de los mismos.
4. Para la lectura de los capítulos 2 y 3 es importante tener conocimientos previos de teoría de grupos y anillos.
5. Implementar el estudio de teoría de módulos en el curso de álgebra 2 de la licenciatura en Matemática Aplicada de la USAC.

**BIBLIOGRAFÍA**

1. BELL, Eric. *Los grandes matemáticos*. Argentina: Editorial Losada, 1948.
2. BLAKE, Ian. *The mathematical theory of coding*. Estados Unidos: Academic Press Inc, 1975.
3. BURNSIDE, William. *The theory of groups of finite order*. 2da ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1911.
4. CAUCHY, Augustin-Louis. Oeuvres complètes. 1era ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
5. DESKINS, Eugene.”Finite abelian groups with isomorphic group algebras". *Duke Mathematical Journal*. 1956, vol 23, núm. 1, p. 35-40.
6. FEIT, Walter, et al. “The solvability of groups of odd order". *Pacific J. Math*. 1963, vol 13, núm 3, p. 775-1029.
7. GOLDSHMIDT, David. “A group theoretic proof of the theorem for odd primes".*Mathematische Zeitschrift*. 1970, vol 113, núm. 5, p. 373-375.
8. HAWKINS, Thomas. “The origins of the theory of group characters". *Archive for History of Exact Sciences*. 1971, vol 7, núm. 2, p. 142-170.
9. HERSTEIN, Nathain. *Topics in algebra*. 2da ed. New York: Macmillah, 1986.
10. IAN, Connell. “On the group ring". *Canad. J. Math*. 1963, vol 15, núm 1, p. 650-685.
11. ISAACS, Martin. *Algebra: a graduate course*. Estados Unidos: Editorial Pacific Grove, 1940.

1. LANG, Serge. *Linear algebra*. 3ra ed. Nueva York: Springer-Verlag, 2004. 308 p.
2. POLCINO, César; SEHGAL, Sudarshan. *An introduction to group rings*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 371 p.

**AGRADECIMIENTOS**

A Dios y a mi familia.

**AUTOR**

****

*Hugo Allan García Monterrosa*

*Licenciado en Matemática Aplicada*

*Facultad de Ingeniería*

*Universidad de San Carlos de Guatemala*

**THEORY OF GROUP RINGS**

**AND ITS APLICATTIONS**

*Hugo Allan García Monterrosa*

*hugoallangm@gmail.com*

*Degree in applied mathematics*

*Advisor: William Roberto Gutiérrez Herrera, Degree in applied mathematics*

**ABSTRACT**

Group Rings are developed from groups and rings, generating a new algebraic structure. In this paper connections between group rings and group and rings are made. After studying properties of group rings a very short study of correctors codes is made. Finally it is showed that there exists a relationship between cyclic codes and group algebras.

***Keywords:*** *algebra, groups, rings, codes.*

**BODY**

The paper is structured in six chapters. The first three have a similar structure, developing a theoretical description of each disciplines used for the application described in the fourth chapter.

In the first chapter the main concepts of algebra are developed, working harder in the main points to understand the theory of group rings.

In the second chapter group rings and group algebras are defined, showing that the second case is a especial one of the first case. Conditions for semisimplicity of a group rings are given in the Maschkes theorem.

The relationship between representations of a given group over a ring and modules over a group ring are given in the third chapter.

In the fourth chapter some algebraic elements are studied such as nilpotent elements, idempotent elements and torsion units.

In the fifth chapter a short introduction of units of group rings is given, showing that there are some recipes to build non trivial units.

Finally, in the sixth chapter it is presented a short introduction to code theory giving relevant importance to cyclic codes and showing that there exist a strong relationship between those kind of codes and group algebras.

**RESULTS**

Some highlights of this investigation are:

1. Let G be an abelian finite p-group, then G can be written as direct product of cyclic subgroups. This composition is unique.
2. RG is semisimply if and only if the following conditions are meet:

* R is a semisimple ring
* G is finite
* |G| is invertible in R.

1. There exists a bijection between representations of G over R and free RG-modules of finite rank.
2. If characteristic of the filed does not divide to the order of the group, then the study of cyclic codes is equivalent to the study of ideals in group algebras.

**CONCLUTIONS**

1. Para el estudio de los grupo-anillos es importante conocer la estructura de los grupos abelianos y hamiltonianos, así como la teoría de módulos y el teorema de Wedderburn-Artin.
2. Las condiciones necesarias y suficientes para que un grupo-anillo sea semisimple, vienen dadas por el teorema de Maschke.
3. Toda representación de un anillo conmutativo sobre un grupo dado,
4. corresponde a un módulo del grupo-anillo correspondiente.
5. En general no es fácil encontrar unidades no triviales en grupo-anillos, pero es posible construir algunas usando elementos idempotentes.
6. Las grupo-álgebras dan estructura matemática a los códigos correctores conocidos como c cíclicos.
7. The application of the mathematical formalism developed to thermodynamics and statistical mechanics on economics, through establish some basic similarities in the systems of these disciplines, can derive some interesting economic results.
8. Through this formalism was possible to introduce two economic variables usually not included in the classic study of this discipline: economic temperature and economic entropy as a measure of development and economic disorder respectively.
9. State function for the utility determined in the equation (1), was specified by the principal variables in the economic system from which we can derive the marginal utilities of goods and money and their relationship with the utility, was determined individually with the development and disorder in the economy.
10. Maxwell relations in the economy, determined in equation (2), can provide a mechanism to measure variations in temperature and entropy in economic, function of other variables whose measurement were determined feasible.
11. The Gibb -Duhem relation in the economy determined in the equation (3), allows us to relate changes in the intensive variables in the economic system. This relationship is evident as the decline in prices of goods and money making the economy temperature increase resulting in greater economic development .
12. Finally, an expression that shows the distribution of individuals in the economic system with reference to the amount of wealth of these, shown in the equation (4). In this expression a pyramidal shape for this distribution is established , as shown by most economies .

**RECOMMENDATIONS**

1. Considering flexibility in some assumptions made in this study, relationships found can be verified through some kind of econometric study.
2. Is possible consider other similarities between other branches of physics and economics in order to compare the results between these applications.
3. Results obtained in this work are only part of which can be obtained based on the proposed analogies, that development can be made ​​widespread. For example, is possible to study the case where the economy is treated as an open system, which is a more realistic situation, and might be more appropriate to continue working with the statistical mechanics, specifically with other ensembles untreated.

**BIBLIOGRAPHY**

1. ALBERTY, Robert; SILBEY, Robert; BAWENDI Mongi. *Physical Chemistry*. 4th. ed. United States: Wiley, 2004. 960 p. ISBN: 04-7121-504-2.
2. COSIN, Luis. *Una lección de física estadística*. [online] <http://crashoil. blogspot.com/2012/10/una-leccion-de-fisica-estad istica.html.> [Reference date: August 5th, 2013.]
3. *Física estadística*. [online] <http://www. lawebdefisica.com/apuntsfis/estadistica/.> [Reference date: December 2th, 2013.]
4. GAMERO, Rafael. *Termodinámica Avanzada.* [online] <http://www. sarecfiq.edu.ni/pmciq/che570/pdf/3a.pdf.> [Reference date: November 1th, 2013.]
5. GIL, Francisco. *Apuntes de Termodinámica*. [online] <http://www.dfists.ua.esgil/ apuntestermo.pdf.> [Reference date: November 1th, 2013.]
6. GRATTON, Julio. *Termodinámica e introducción a la mecánica estadística*. [online] <http://www.lf p.uba.ar/es/notas%20de%20cursonotatermodinamica/Termodinamica.pdf.> [Reference date: November 1th, 2013.]
7. JEHLE, Geoffrey; RENY Philip. *Advanced microeconomic theory.* 3a. ed. England: Pearson, 2011. 654 p. ISBN: 02-7373-191-7.
8. MEDEIROS, Milton. *Notas del curso: equilibrio termodinámico*. [online] <http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/Materialdidacticoparaapoyodelcursodeequilibrioycinetica\\_14972.pdf.> [Reference date: November 25th, 2013.]
9. Microeconomics. [online] <http://en. wikipedia.org/wiki/Microeconomics.> [Reference date: Dicember 15th, 2013.]
10. ROLLE, Kurt. *Termodinámica*. 6a. ed. Spain: Pearson Education, 2006. 611 p. ISBN 97-0260-757-4.
11. SASLOW, Wayne. *An economic analogy to thermodynamics*. [online] <http ://users.df.uba.ar/giribet/f4/economic.pdf.> [Reference date: August 2th, 2013.]
12. *Statistical mechanics*. [online] <http://en. wikipedia.org/wiki/Statistical\_mechanics> [Reference date: December 2th, 2013.]
13. *Stirling's approximation*. [online] <http://en. wikipedia.org/wiki/Stirling%27s\_approximation> [Reference date: December 5th, 2013.]
14. TENG, Leo. *Homogeneous & Homothetic Functions.* [online] <http://peop le.stfx.ca/tleo/econ471lec5.pdf> [Reference date: November 20th, 2013.]
15. *Thermodynamics.* [online] <http://en.wiki pedia.org/wiki/Thermodynamics> [Reference date: October 1th, 2013.]
16. VILLAR, Antonio. *Microeconomía*. 1a. ed. Spain: McGraw-Hill, 2006. 400 p. ISBN: 84-4814-652-2.
17. VARIAN, Hal. *Análisis Microeconómico*. Rabasco, Esther; Toharia, Luis (trad.).

3a. ed. Spain: Antoni Bosch Editor, 1992. 635 p.ISBN: 84-8585-563-9.

1. ZEMANSKY, Mark; DITTMAN Richard. *Calor y Termodinámica*. Masarnau, Juan (trad.). 6a. ed. Mexico: McGraw-Hill, 1986. 584 p. ISBN: 96-8451-631-2.

**ACKNOWLEDGEMENTS**

To God and my family.

**AUTHOR**

****

*Rodrigo Antonio Trinidad Ortega*

*Degree in applied physics*

*Engineering School*

*Universidad de San Carlos de Guatemala*